Nexo Revista Científica
ISSN-L 1818-6742

http://www.lamjol.info/index.php/NEXO

Vol. 26, No. 02, pp. 88-98/Diciembre 2013

Producto Especial de convolución del Núcleo Ultrahiperbólico de Marcel Riesz.

Manuel A. Aguirre * and Emilio Aguirre R.

(Núcleo Consolidado de Matemática Pura y Aplicada(NuCOMPA)
Facultad de Ciencias Exactas Universidad Nacional del Centro
Pinto 399,(7000)Tandil, Argentina
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(Recibido/received: 19-Junio-2013; aceptado/accepted: 2130-Noviembre-2013)

RESUMEN

En este artículo primero consideramos la fórmula $R_{-2k}(u) = \square^k \delta(x)$ para el caso especial μ par y ν y par y luego le damos sentido al producto de convolución $R_{-2k}(u) * R_{-2l}(u)$ para este caso, donde $R_\alpha(u)$ es el núcleo ultrahiperbólico definido por (8) y $\square^k$ es el operador definido por (16). Como consecuencia se obtiene la fórmula de $W_{-2k}(u,m)$ y el producto de convolución de $\{\square + m^2\}^k \delta\{x\} * \{\square + m^2\}^l \delta\{x\}$, donde $W_\alpha(u,m)$ es la familia de funciones distribucionales definida (37) y $\{\square + m^2\}^k$ es definido por (39).

Palabras claves: Teoría de distribuciones; convolución de distribuciones.
Clasificación de AMS: 46F10,46F12.

ABSTRACT

In this article first let consider the formula $R_{-2k}(u) = \square^k \delta(x)$ for the special case μ even and ν even and then we give a sense to the convolution product of $R_{-2k}(u) * R_{-2l}(u)$ for this case, where $R_\alpha(u)$ is the ultrahyperbolic kernel defined by (8) and $\square^k$ is the operator defined by (16). As consequence we obtain the formula of $W_{-2k}(u,m)$ and the convolution product of $\{\square + m^2\}^k \delta\{x\} * \{\square + m^2\}^l \delta\{x\}$, where $W_\alpha(u,m)$ is the distributional family defined by (37) and $\{\square + m^2\}^k$ is defined by (39).

Keywords: Distributions Theory; convolution of distributions
AMS Subject Classification: 46F10,46F12

*Work partially support by "Comisión de investigaciones Científicas (C.I.C.)" de la provincia de Buenos Aires, Argentina.

1. Introducción.

Sea $x=(x_{1,}x_2,...x_n)$ un punto de R^n y sea

$$x_1^2+...+x_\mu^2-x_{\mu+1}^2-...x_{\mu+\nu}^2=u, \tag{1}$$

$\mu+\nu=n$ (dimensión del espacio). By H_+ se designa el interior de un cono avanzado ó cono de avance:

$$H_+=\{x\in R^n : x_1>0, u>0\}, \tag{2}$$

y por $\bar{H}_+$ se designa su clausura. Similarmente, H_- designa el dominio

$$H_-=\{x\in R^n : x_1<0, u>0\} \tag{3}$$

y $\bar{H}_-$ designa su clausura.

Sea $F(\lambda)$ una función de variable escalar λ , y sea $\Phi(x)$ una función dotada de las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &a)\ \Phi(x)=F(u)\\ &b)\ \text{soporte } \Phi(x)\subset \bar{H}_+\\ &c)\ e^{\langle x,y\rangle}\Phi(x)\in L_1 \quad \text{if } y\in V_-, \end{aligned} \tag{4}$$

donde

$$V_-=\left\{y\in R^n : y_1>0, y_1^2+\ldots+y_\mu^2-y_{\mu+1}^2-\ldots y_{\mu+\nu}^2>0\right\}, \tag{5}$$

Llamamos R la familia de funciones $\Phi(x)$ que satisfacen las condiciones dadas en (4).

Similarmente, llamamos A la familia de funciones que satisfacen las condiciones:

$$\begin{aligned} &a')\ \Phi(x)=F(u)\\ &b')\ \text{soporte } \Phi(x)\subset \bar{H}_-\\ &c`)\ e^{\langle x,y\rangle}\Phi(x)\in L_1 \quad \text{if } y\in V_+, \end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$V_+=\left\{y\in R^n : y_1<0, y_1^2+\ldots+y_\mu^2-y_{\mu+1}^2-\ldots y_{\mu+\nu}^2>0\right\}. \tag{7}$$

Vamos a considerar la siguiente familia de funciones R_α introducida por Y. Nozaki ([1], page 72):

$$R_\alpha(u) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{u^{\frac{\alpha-n}{2}}}{K_n(\alpha)} & si & x \in H_+ \\ \\ 0 & si & x \notin H_+ \end{array} \right\} \tag{8}$$

Aquí α es un parámetro complejo y n la dimensión del espacio.

la constante $K_n(\alpha)$, es definida por

$$K_n(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{2+\alpha-n}{2})\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\frac{2+\alpha-\mu}{2})\Gamma(\frac{\mu-\alpha}{2})} \tag{9}$$

donde, $\Gamma(\alpha)$ es la función gama, μ es el número de términos positivos de

$$u = x_1^2 + \ldots + x_\mu^2 - x_{\mu+1}^2 - \ldots x_{\mu+\nu}^2, \tag{10}$$

y $\mu + \nu = n$.

$R_\alpha(u)$, es una función ordinaria si $\mathrm{Re}(\alpha) \geq n$, y es una distribución de α.

Llamaremos a $R_\alpha(u)$ el núcleo ultrahiperbólico de Marcel Riesz. Haciendo $\mu = 1$ en (8) y (9) y usando la fórmula de duplicación de Legendre de $\Gamma(z)$

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) \tag{11}$$

([2], Vol. I, página 344, fórmula (15)), la fórmula (8) se reduce a

$$M_\alpha(u) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{u^{\frac{\alpha-n}{2}}}{H_n(\alpha)} & si & x \in H_+ \\ \\ 0 & si & x \notin H_+. \end{array} \right\} \tag{12}$$

Aquí

$$u = x_1^2 - x_2^2 - \ldots x_n^2, \tag{13}$$

y

$$H_n(\alpha) = \pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\alpha - n + 2}{2}). \tag{14}$$

$M_\alpha(u)$ es, precisamente, el núcleo hiperbólico de Marcel Riesz ([5], page 31).

Sea $R_\alpha(u)$ el núcleo ultrahiperbólico definido en (8), S.E. Trione en ([4], página 9, fórmula (III.9) demuestra la validez de la propiedad

$$R_{-2k}(u) = \Box^k \delta(x) \tag{15}$$

para μ impar y ν par (n impar) y $k = 0,1,2,\ldots$ donde

$$\Box^k = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+1}^2} - \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+\nu}^2} \right\}^k \tag{16}$$

es el operador ultrahiperbólico iterado k veces y $\delta(x) = \delta(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es la distribución delta de Dirac.

Los casos (μ par y ν impar), (μ par y ν par) y (μ impar y ν impar) han sido considerados en ([7]).

En particular se sabe de ([7], página 146, fórmula 2.53 y página147, fórmula 2.57) que la fórmula (15) es válida para los casos (μ impar y ν par) (n impar) y (μ impar y ν impar) (n par).

En este artículo primeramente vamos a considerar la fórmula (15) para el caso especial μ par y ν par y luego le daremos un sentido al producto de convolución de $R_{-2k}(u) * R_{-2l}(u)$ para este caso, donde $R_\alpha(u)$ es el núcleo ultrahiperbólico definido en (8). Como consecuencia se obtiene una fórmula para $W_\alpha(u,m)$ en $\alpha = -2k.k = 0,1,2,\ldots$ y se obtiene el producto de convolución $\{\Box + m^2\}^k \delta\{x\} * \{\Box + m^2\}^l \delta\{x\}$, donde $W_\alpha(u,m)$ es la familia de funciones distribucionales defінda en (37).

Observemos que la constante definida en(form.9) usando la fórmula de duplicación de Legendre de $\Gamma(z)$ (ver fórmula (11)) se reduce a

$$K_n(\alpha) = H_n(\alpha) \chi(\mu, \alpha) \tag{17}$$

donde $H_n(\alpha)$ está definida en(14) y

$$\chi(\mu, \alpha) = \frac{\Gamma(\frac{1-\alpha}{2}) \Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{2+\alpha-\mu}{2}) \Gamma(\frac{\mu-\alpha}{2})} \tag{18}$$

luego la diferencia entre $K_n(\alpha)$ y $H_n(\alpha)$ es el factor $\chi(\mu, \alpha)$ definido en (18).

Ahora usando las fórmulas

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen(z\pi)} \tag{19}$$

y

$$\Gamma(z+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-z) = \pi\sec(z\pi) \tag{20}$$

De (18), se tiene

$$\chi(\mu,\alpha) = \frac{sen(\frac{\mu-\alpha}{2})\pi}{\cos(\frac{\alpha}{2})\pi}. \tag{21}$$

Por tanto de (21), se tiene

$$\chi(\mu,\alpha) = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \tag{22}$$

si μ es impar y

$$\chi(\mu,\alpha) = \frac{(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}} sen(\frac{\alpha}{2})\pi}{\cos(\frac{\alpha}{2})\pi} \tag{23}$$

si μ es par.

De (17) y considerando (22) y (23) se tiene

$$K_n(\alpha) = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} H_n(\alpha) \tag{24}$$

si μ es impar y

$$K_n(\alpha) = \frac{(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}} sen(\frac{\alpha}{2})\pi}{\cos(\frac{\alpha}{2})\pi} H_n(\alpha) \tag{25}$$

si μ es par.

Por otra parte, de ([3],página 352), se tiene

$$\operatorname{Re}siduo_{\lambda=-\frac{n}{2}-k,k=0,1,\ldots} \quad P_+^{\lambda} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)} + \tag{26}$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\square^k\{\delta(x)\}$$

si μ y ν son ambos pares ([3], página 352). Donde

$$P_+^{\lambda} = \begin{cases} P^{\lambda} & si \quad P \geq 0 \\ 0 & si \quad P \leq 0 \end{cases} \tag{27}$$

([3], página 276), $P = P(x) = u(x)$ definida en (10) y $\square^k$ está definido en (16). En (26) $\delta_1^{(l)}(P)$ se entiende en el sentido de la reguralización de $\delta^{(l)}(P)$ ([2], page 249) si $l \geq \frac{n}{2}-1$.

2. $R_{-2k}(u)$(caso μ y ν par)

Considerando que $u^{\frac{\alpha-n}{2}}$ tiene polos simple en los puntos $\alpha = -2k, k = 0,1,\ldots$ ([3], página 260) y tomando en cuenta que $\Gamma(\frac{\alpha}{2})$ ([2], página, fórmula 8) tiene también polos simple en los mismos puntos, se tiene la siguiente fórmula,

$$R_{-2k} = \lim_{\alpha\to-2k} R_\alpha(u) = \lim_{\alpha\to-2k} \frac{u^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)}.$$

$$.\lim_{\alpha\to-2k} \frac{1}{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\chi(\mu,\alpha)} = \lim_{\alpha\to-2k} \frac{u^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)}.$$

$$\lim_{\alpha\to-2k} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})\pi}{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\pi(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}}} = \frac{\operatorname{Re}s_{\alpha=-2k} \; u^{\frac{\alpha-n}{2}}}{\operatorname{Re}s_{\alpha=-2k} \; \Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)}. \tag{28}$$

$$\lim_{\alpha\to-2k} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})\pi}{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\pi(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}}} = \left[\frac{k!(-1)^k}{2^{-2k}(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}\right]$$

$$\left[\delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(P) + \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}\square^k\{\delta(x)\}\right].$$

si μ y ν ambos son pares.

Ahora tomando en cuenta la siguiente fórmula

$$\delta^{(s)}(u) = \frac{(-2)(-1)^{s}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{s-\frac{n}{2}+1}(s-\frac{n}{2}+1)!}\square^{s-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \tag{29}$$

si μ y ν son ambos pares y $s \geq \frac{n}{2}-1$ ([8], página 261, fórmula 54), donde $\square^{k}$ está definido en (16), se tiene la siguiente fórmula

Lema 1 *La siguiente fórmula es válida*

$$R_{-2k}(u) = (-1)\square^{k}\{\delta(x)\} \tag{30}$$

si μ *y* ν *son ambos pares. Donde* $R_{\alpha}(u)$ *es el núcleo ultrahiperbólico definido en (8).*

Demostración: *la fórmula (30) es consecuencia de las fórmulas (28) y (29), donde* $\square^{k}$ *está definido en (16).*

Por otra parte, sabemos que la siguiente fórmula es válida,

$$R_{-2k}(u) = (-1)\square^{k}\{\delta(x)\} \tag{31}$$

si μ y ν son ambo μ s impares ([7],página 147, fórmula (2.57)).Por tanto de (30) y (31) se tiene la siguiente fórmula

$$R_{-2k}(u) = (-1)\square^{k}\{\delta(x)\} \tag{32}$$

si n es par.

Ahora de (32) y considerando la fórmula (15), se obtiene la siguiente fórmula

$$R_{-2k}(u) = (-1)^{n+1}\square^{k}\{\delta(x)\} \tag{33}$$

bajo las condiciones:

$$a)\ n \geq 2$$
$$y$$
$$b)\ 0 \leq k.$$

3. El producto de convolución de $R_{-2k}(u) * R_{-2l}(u)$

Sabemos que la siguiente propiedad es válida

$$R_{-2k}(u) * R_{-2l}(u) = R_{-2(k+l)}(u) \tag{34}$$

si n es impar ([12], página 123, fórmula (I,2,6)). Usando el producto de convolución

$$\Box^{t}\{\delta(x)\} * \Box^{s}\{\delta(x)\} = \Box^{t+s}\{\delta(x)\} \tag{35}$$

si n es par y t, s son enteros no negativos ([9], página 346, fórmula (5.3)), se tiene la siguiente fórmula:

Lema 2 *La siguiente fórmula es válida*

$$R_{-2k}(u) * R_{-2l}(u) = (-1)^{n+1} R_{-2(k+l)}(u) \tag{36}$$

donde el símbolo $*$ significa convolución.

Demostración: *La fórmula (36) es consecuencia de las fórmulas (33), (34) y (35).*

4. $W_{-2k}(u,m)$

Consideremos la familia de funciones R introducidas por S.E. Trione ([6])

$$W_{\alpha}(u,m) = \begin{cases} (m^{-2}u)^{\frac{\alpha-n}{2}} J_{\frac{\alpha-n}{2}}((m^{2}u)^{\frac{1}{2}}) & if\ \mathrm{t} \in \Gamma_{+} \\ 0 & if\ \mathrm{t} \notin \Gamma_{+} \end{cases} \tag{37}$$

donde u está definida en (10), α es un parámetro complejo, m es un número real no negativo, n es la dimensión del espacio y $J_{\gamma}(z)$ designa la función de Bessel de primera clase definida por la fórmula:

$$J_{\gamma}(z) = \sum_{p=o}^{\infty} \frac{(-1)^{p}(\frac{x}{2})^{\gamma+2p}}{p!\Gamma(\gamma+p+1)}. \tag{38}$$

$W_{\alpha}(u,m)$ la cual es una función ordinaria si $\mathrm{Re}(\alpha) \geq n$, es una distribución de α.

Escribimos por definición

$$\{\Box + m^2\}^k = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+1}^2} - \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu+\nu}^2} + m^2 \right\}^k \tag{39}$$

donde $\mu + \nu = n$ es la dimensión del espacio y m un número real, $\{\Box + m^2\}^k$ es el operador $n-$ dimensional ultrahiperbólico de Klein Gordon iterado k veces.

De ([6]) se tiene la siguiente fórmula:

$$W_\alpha(u,m) = \sum_{p=o}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{p} (m^2)^p R_{\alpha+2p}(u) \tag{40}$$

donde $R_\lambda(u)$ es la familia de funciones distribucionales introducida por Nozaki ([1], página 72) definida por la fórmula (9) y

$$\binom{-\frac{\alpha}{2}}{p} = \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{p!\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}-p)}. \tag{41}$$

Haciendo $\alpha = -2k, k = 0,1,\ldots$ en (41) y usando (19) se tiene

$$\binom{-\frac{\alpha}{2}}{p} = \begin{cases} \binom{k}{p} & \text{if} \quad 0 \leq p \leq k \\ \\ 0 & \text{if} \quad p > k. \end{cases} \tag{42}$$

De (40), usando (33) y (42) se tiene,

$$W_{-2k}(u,m) = \sum_{p=o}^{k} \binom{k}{p} (m^2)^p R_{-2(k-p)}(u) = \sum_{p=o}^{k} \binom{k}{p} (m^2)^p \Box^{k-p} \{\delta(x)\}. \tag{43}$$

Por otra parte, considerando la fórmula

$$\{\Box + m^2\}^{-\frac{\alpha}{2}} = \sum_{p=o}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{p} (m^2)^p \Box^{-\frac{\alpha}{2}-p} \tag{44}$$

dada por S.E. Trione in ([6]) y tomando en cuenta la propiedad (42) se tiene

$$\{\Box + m^2\}^k\{\delta(x)\} = \sum_{p=o}^{k}\binom{k}{p}(m^2)^p\Box^{k-p}\{\delta(x)\}. \tag{45}$$

De (40), (43) y (45) se tiene la siguiente fórmula

$$W_{-2k}(u,m) = (-1)^{n+1}\{\Box + m^2\}^k\{\delta(x)\} \tag{46}$$

donde n es la dimensión del espacio.
La fórmula

$$W_{-2k}(u,m) = \{\Box + m^2\}^k\{\delta(x)\} \tag{47}$$

fue probada por S.E. Trione en ([6]).
Podemos observar que las fórmulas (46) y (47) son iguales para el caso n impar.
Usando las fórmulas (46), (44) y (36) y tomando en cuenta la fórmula

$$\left(\sum_{s=o}^{t}\binom{k}{s}\binom{l}{t-s}\right) = \binom{k+l}{t} \tag{48}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
&(-1)^{n+1}\{\Box + m^2\}^k\{\delta(x)\} * (-1)^{n+1}\{\Box + m^2\}^l\{\delta(x)\} = \\
&= W_{-2k}(u,m) * W_{-2l}(u,m) = \\
&= \sum_{p=o}^{\infty}\binom{k}{p}(m^2)^p R_{-2(k-p)}(u) * \sum_{j=o}^{\infty}\binom{l}{j}(m^2)^j R_{-2(l-j)}(u) = \\
&= \sum_{t=o}^{\infty}\left(\sum_{s=o}^{t}\binom{k}{j}\binom{l}{t-j}\right)(m^2)^t[R_{-2(k-p)}(u) * R_{-2(l-j)}(u)] = \\
&\sum_{t=o}^{\infty}\binom{k+l}{t}(m^2)^t(-1)^{n+1}R_{-2(k+l-t)}(u) = \\
&= (-1)^{n+1}W_{-2(k+l)}(u,m) = \{\Box + m^2\}^{k+l}\{\delta(x)\}.
\end{aligned} \tag{49}$$

De (49) se tiene la siguiente fórmula:

Lema 3 *La siguiente fórmula es válida*

$$\{\square + m^2\}^k \delta(x) * \{\square + m^2\}^l \{\delta(x)\} = (-1)^{n+1} \{\square + m^2\}^{k+l} \{\delta(x)\}. \tag{50}$$

donde n *es la dimensión del espacio.*

Demostración: *La fórmula (50) es consecuencia de la fórmula (49).*

La fórmula (50) es una generalización de la fórmula

$$\{\square\}^k \delta(x) * \{\square\}^l \{\delta(x)\} = \{\square\}^{k+l} \{\delta(x)\}. \tag{51}$$

la cual aparece en ([9], página 346, fórmula (5.3)).

4. Referencia

[1] Y. Nozaki, On Riemann-Liouville integral of ultrahyperbolic type, Kodai Mathematical Seminar Reports, 6 (2):69-87(1964).

[2] A. Erdelyi, Ed. Higher Trascendental Functions, Vol.I and II, McGraw-Hill, New York, 1953.

[3] I.M.Gelfand and G.E.Shilov., Generalized Functions, Vol.I, Academic Press, New York, 1964.

[4] Trione S.E., On Marcel Riesz'Ultrahyperbolic Kernel, prepint 116,Trabajos de Matemática, Instituto Argentina de Matemática-CONICET,1987.

[5] Riesz M., L ´integrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math. 81,1-223,1949.

[6] Trione S.E., On the elementary retarded, ultrahyperbolic solution of the Klein-Gordon operator, iterated k-times, Studies in Applied Mathematics, Massachusetts Institute of Thecnology,Cambridge,Massachuesetts,U.S.A., 79,pp.121-141,1988.

[7] Aguirre M. A., The Distributional Hankel Transform of Marcel Riesz's Ultrahyperbolic Kernel,Studies in Applied Mathematics 93:133-162,1994

[8] Aguirre M. A., Proportionality of k-th derivative of Dirac delta in the hypercone, Mathematica Balkanica, New Series Vol.14, 2000, Fasc.3-4.

[9] Aguirre M. A., The distribution $\delta^{(k)}(P \pm io - m^2)$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 88 (1977), 339-348.

[10] Aguirre M. A., The convolution product of $W_\alpha(u,m) * W_\beta(u,m)$, Mathematicae Notae, Vol.38, 1995/96, Rosario, República Argentina.

[11] Aguirre M. A., New formulae about the residue of distributions $P_\pm^\gamma$ (Nuevas fórmulas acerca del residuo de la distribución $P_\pm^\gamma$, NEXO (Revista Científica) vol.20,No. 01.pp.35-45,2007.

[12] Aguirre M. A.and Trione S.E.,The distributional convolution products of Marcel Riesz ´ultra-hyperbolic kernel, Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen 39, 1995.

Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar